

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă locală, București, 8 februarie 2025

CLASA a VI-a - Soluții și barem

Problema 1 Fie mulțimea $A = \left\{ \overline{abcd} \in \mathbb{N} \mid \frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} \right\}$.

- a) Arătați că $2025 \in A$;
b) Aflați cardinalul mulțimii A ;
c) Calculați *c.m.m.d.c.* dintre cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii A .

Soluție:

- a) $\frac{20}{4} = \frac{25}{5} = 5 \Rightarrow 2025 \in A$ **2p**
b) $5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd} \Rightarrow 5 \mid 4 \cdot \overline{cd} \Rightarrow 5 \mid \overline{cd} \Rightarrow \overline{cd} = 5 \cdot n, \overline{ab} = 4 \cdot n, n \in \mathbb{N}$, deci $3 \leq n \leq 19$. **2p**
Prin urmare, mulțimea A are 17 elemente **1p**
c) Cel mai mic element al mulțimii A este 1215, iar cel mai mare 7695. Cum $1215 = 3^5 \cdot 5$, $7695 = 3^4 \cdot 5 \cdot 19$, obținem $(1215; 7695) = 3^4 \cdot 5 = 405$ **2p**

Problema 2

- a) Determinați numerele prime p cu proprietatea că numerele $p + 4$ și $p^3 + 2$ sunt, de asemenea, prime.
b) Demonstrați că nu există numere prime q astfel încât numerele $q^5 + 4$ și $q^{2024} + 4$ să fie simultan prime.

autor: Cătălin Cristea, supliment Gazeta Matematică

Soluție:

- a) $p = 3 \Rightarrow p + 4 = 7, p^3 + 2 = 29$, ambele numere prime **1p**
Dacă $p = 2 \Rightarrow p + 4 = 6$. Pentru $p > 3$, dacă $p = 3k + 1$ rezultă $p^3 + 2 \equiv 3 \pmod{3}$, $p^3 + 2 > 3$, iar dacă $p = 3k + 2$, atunci $p + 4 = 3k + 6 \equiv 0 \pmod{3}$. În concluzie, $p = 3$ **2p**
b) Dacă $q = 2 \Rightarrow q^5 + 4 = 36 \equiv 0 \pmod{2}$, iar dacă $q = 5 \Rightarrow q^5 + 4 = 3129 \equiv 3 \pmod{5}$ **1p**
Pentru q impar, $(q, 5) = 1$, observăm că $u(q^4) = 1$, deci $u(q^{2024} + 4) = 5$, așadar $q^{2024} + 4$ nu este număr prim **3p**
Am notat cu $u(n)$ ultima cifră a lui n .

Problema 3 Se consideră n unghiuri în jurul unui punct având măsurile exprimate în grade prin numere naturale distincte.

- Determinați valoarea minimă posibilă a lui n , știind că măsurile celor n unghiuri sunt divizori ai numărului 2025.
- Dacă $n = 23$, arătați că există cel puțin un unghi care are măsura egală cu un divizor al numărului 2025.

autor: Traian Preda

Soluție:

- Măsurile, în grade, aparțin mulțimii $A = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135\}$. Fiind toate numere impare, rezultă că n este par **1p**
 Maximul sumei a 4 măsuri este $135 + 81 + 75 + 45 = 336 < 360$, deci $n \geq 6$ **1p**
 Cum $135 + 81 + 75 + 45 + 15 + 9 = 360 \Rightarrow n_{min} = 6$ **1p**
- Presupunem că există 23 de unghiuri astfel încât nicio măsură să nu aparțină mulțimii A . Atunci suma minimă a măsurilor lor va fi $(1 + 2 + 3 + \dots + 30) - (1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 25 + 27) = 380$, deci $360 \geq 380$, contradicție! Prin urmare, presupunerea făcută este falsă **3p**
 Mai rămâne să arătăm că există 23 de unghiuri cu proprietatea din enunț. Dacă înlocuim 21 cu 1 în suma minimă de mai sus, avem 23 de unghiuri în jurul unui punct cu măsurile numere naturale distincte. **1p**

Observație Ultimul punct de la $b)$ se acordă doar la final.

Problema 4 Să se determine 46 de numere naturale cu proprietatea că mulțimea $\{2027, 2029, 2031, \dots, 2115\}$ este mulțimea tuturor sumelor de câte 45 dintre ele.

autor: Cristian Olteanu

Soluție:

Notăm numerele cu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{46}$ și suma lor cu S . Atunci
 $S - a_{46} = 2115 = 2025 + 90$,
 $S - a_{45} = 2113 = 2025 + 88$,
 \dots
 $S - a_2 = 2027 = 2025 + 2$,
 $S - a_1 = x$, unde $x \in \{2027, 2029, \dots, 2115\}$ **2p**
 Sumând egalitățile de mai sus obținem $46 \cdot S - S = 2025 \cdot 45 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 45) + x \Rightarrow$
 $45S = 45^3 + 45 \cdot 46 + x$, deci $x : 45 \Rightarrow x = 2115$ **3p**
 Atunci $S = 2118$, și $a_1 = a_{46} = 3, a_{45} = 5, a_{44} = 7, \dots, a_2 = 91$ **2p**